Agro 2005 option Biochimie
2e épreuve.

Banque <<Agro-Véto >>

A - 0805T

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Le Sujet compte 4 pages. Les deux parties du problème sont mutuellement indépendantes.

Introduction et Notations

Le jeu de pile ou face, joué avec des pièces équilibrées ou biaisées, permet la modélisation la plus simple et la plus intuitive des expériences de Bernoulli.

Par convention la lettre Π (pour Pile) sera associée au succès de l'expérience, avec une probabilité de p, $p \in]0,1[$ et la lettre Φ (pour Face) sera associée à l'échec de cette expérience, avec une probabilité de $q = 1 - p$.

Première Partie : Algèbre et probabilités.

On lance une pièce (non nécessairement équilibrée), autant de fois qu'il est nécessaire jusqu'à obtenir deux succès consécutifs. Les résultats des lancers sont mutuellement indépendants.
On notera, pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n, U_n et V_n les évènements suivants :

i) S_n='On obtient pour la première fois deux Π consécutifs aux n-ième et (n+1)-ième lancers'.
Par exemple la suite de lancers $(\Pi, \Phi, \Phi, \Phi, \Pi, \Phi, \Pi, \Pi)$ réalise S_7

ii) U_n='Les n premiers lancers ne donnent pas deux Π consécutifs, et le n-ième donne Π'.
La suite précédente réalise U_1, U_5, U_7, (mais pas U_8, Π étant réalisé aux places consécutives 7 et 8).

iii) V_n='Les n premiers lancers ne donnent pas deux Π consécutifs, et le n-ième donne Φ'.
La suite précédente réalise V_2, V_3, V_4, et V_6.

On note respectivement $s_n = P(S_n), u_n = P(U_n)$, et $v_n = P(V_n)$ les probabilités de réaliser les évènements S_n, U_n et V_n.

T.S.V.P.

I.1.a. Déterminer, pour $n \geqslant 1$, les probabilités conditionnelles :

$$P(U_{n+1}/U_n),\ P(U_{n+1}/V_n),\ \mathrm{P}(\mathrm{V}_{n+1}/U_n),\ \text{ et } P(V_{n+1}/V_n).$$

I.1.b. En déduire que, pour $n \geqslant 1$, on a :

$$u_{n+1} = pv_n,\ s_n = pu_n \text{ et que } v_{n+1} = q(u_n + v_n).$$

I.1.c. Montrer que $v_1 = q$ et $u_1 = p$. En déduire s_1, et pour $i \in \{2, 3\}$, les valeurs de s_i, u_i et v_i.

I.2. On se propose de résoudre le système défini pour $n \geqslant 1$:

$$(\Sigma) : \quad \begin{cases} u_{n+1} = pv_n \\ \text{et} \\ v_{n+1} = q(u_n + v_n). \end{cases}$$

I.2.a. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $v_{n+2} = qv_{n+1} + qpv_n$.
En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $s_{n+2} = qs_{n+1} + qps_n$.

I.2.b. Dans cette question, on suppose que $p = \dfrac{2}{3}$.
Déterminer v_n pour $n \geqslant 1$; en déduire u_n et montrer que $s_n = \dfrac{4}{9}[(\dfrac{2}{3})^n - (\dfrac{-1}{3})^n]$.

I.2.c. On pose $\Delta = q^2 + 4qp$, $r_1 = \dfrac{q + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{q - \sqrt{\Delta}}{2}$. Montrer que $s_n = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r_1^n - r_2^n)$.
Indication : On pourra remarquer que $r_1 + r_2 = q$, $r_1 - r_2 = \sqrt{\Delta}$, et $r_1 r_2 = -qp$.

I.3.a Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} s_n$.

I.3.b. En déduire que
X="Nombre de lancers nécessaires à l'obtention de deux Π consécutifs"
est une variable aléatoire.

I.3.c. Déterminer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire réelle X.

Deuxième Partie : Combinatoire et probabilités.

On dispose de deux pièces équilibrées, ($p = q = \frac{1}{2}$) et on réalise l'expérience suivante : Pour n entier , $n \geqslant 1$, on répète n lancers simultanés des deux pièces distinctes numérotées 1 et 2.
Les lancers sont mutuellement indépendants.
On note les résultats sous forme d'un tableau :

$$\begin{pmatrix} N^o \text{ du lancer} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n \\ \text{Pièce 1 :} & \Pi & \Pi & \Phi & \Pi & \Phi & \Phi & \dots & \dots \\ \text{Pièce 2 :} & \Phi & \Pi & \Phi & \Phi & \Pi & \Pi & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on considère l'évènement :
A_k='A l'issue du k-ième lancer les deux pièces ont donné le même nombre de Π .'
Dans l'exemple ci-dessus, seul A_6 est réalisé.

Dans la suite du problème, on pose $P(A_0) = 1$, et on s'intéresse particulièrement à l'évènement A_n.

II.1.a. Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue des n lancers la première pièce ait donné j fois Π.

II.1.b. Soit $j \in \{0, \dots, n\}$, on désigne par $p_j(n)$ la probabilité pour qu'à l'issue des n lancers les deux pièces aient donné chacune j fois Π. Calculer $p_j(n)$.

II.1.c. En déduire que $P(A_n) = \dfrac{1}{2^{2n}} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (C_n^j)^2$. Calculer $P(A_6)$ à 10^{-5} près.

II.2. Calcul de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (C_n^j)^2$.

II.2.a. On considère un ensemble E formé de $2n$ boules deux à deux discernables dont n sont noires et n sont blanches. On note P l'ensemble des parties à n éléments de cet ensemble. Déterminer le nombre d'éléments de P.

II.2.b. Soit P_j l'ensemble des parties à n éléments contenant j boules blanches, déterminer le nombre d'éléments de P_j.

II.2.c. Déduire de ce qui précède $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} C_n^j C_n^{n-j} = C_{2n}^n$, puis la valeur de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (C_n^j)^2$.

II.3.Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$, on définit la variable aléatoire X_k (à valeur dans $\{0, 1\}$), par :

$$\begin{cases} P[X_k = 1] = P(A_k) \\ \text{et} \\ P[X_k = 0] = 1 - P(A_k). \end{cases}$$

Soit N la variable aléatoire : $N = \sum_{k=0}^{n} X_k$ désignant le nombre de fois où l'un des évènements A_k est réalisé.

II.3.a. Montrer que l'espérance de N vaut : $E(N) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2k}} C_{2k}^{k}$.

II.3.b. Démontrer par récurrence que $E(N) = \frac{2n+1}{2^{2n}} C_{2n}^{n}$.

FIN